Краса тішить розум, серце, душу людини. Цю незвичайну красу, красу розуму, красу науки не раз оспівували поети, філософи, митці... Ще у Стародавній Греції вважали, що краса розуму — це найвеличніше!

Краса науки полягає у відкритті нових істин, у виявленні стрункого ладу там, де ще недавно панував хаос. Математика в усі часи була і є "першою красунею" серед наук, отже, й естетичні принципи науки як такої найяскравіше виявляються у математиці. Саме математика вносить красу в будь-яку науку, у цьому полягає, зокрема, її естетична цінність. Як наука неможлива без творчості, так і творчість неможлива без краси. Математичної творчості це стосується насамперед: "Всюди, де число, там і краса", — казали ще давні греки. Мистецькі ідеали пропорційності і гармонійності — це водночас і математичні ідеали.

Безсумнівно, можна стверджувати, що справжній математик завжди є і художником, і архітектором, і поетом. За допомогою свого інтелекту математики створили свій світ, світ уявний, який вони розвивають у всіх можливих напрямках, у який вірять, який допомагає їм чітко, ясно, глибоко й усебічно зрозуміти гармонію природи.

Математика, у певному розумінні, — родичка поезії. Це поезія думки, "поезія логіки ідей", як говорив А. Айнштайн [2], а математичні закони не тільки виявляють особливості об'єктивного світу, а й відображають "справжню глибоку красу природи". Як мистецтво дарує людині красу чуттєвого, так математика дарує людині красу розумового. Не випадково так багато математиків були ревними шанувальниками мистецтва, а багато митців виражали своє захоплення стрункістю та красою математичної думки. Недарма в математичній літературі зустрічаємо вислови "красива побудова", "стрункий виклад", "чарівна, дивовижна теорема", "нема нічого кращого, гарнішого", "золота формула", "витончена теорія", "елегантний підхід" та інші.

Наша стаття присвячена ***золотій пропорції*** як прояву гармонії навколишнього світу.

ЗОЛОТА ПРОПОРЦІЯ ЯК ПРОЯВ ГАРМОНІЇ НАВКОЛИШНЬОГО СВІТУ

Леонардо Фібоначчі

Роман Балашевич
учень 11-го класу
гімназії "Престиж",
слухач Малої академії наук,
м. Київ

Педагогічний керівник —
Ірина Петрівна Пилипчук,
вчитель математики
гімназії "Престиж", м. Київ

ВІДНОШЕННЯ І ПРОПОРЦІЇ З МАТЕМАТИЧНОЇ ТОЧКИ ЗОРУ

Означення. Відношенням називається таке число, що показує, у скільки разів одна величина більша за другу.

Числа, які складають відношення, називаються ***членами відношення***.

Пропорція — це рівність двох відношень. Також слово "***пропорція***" має такі значення, як співвідношення частин цілого між собою; кількісне співвідношення між складовими частинами чого-небудь; розмірність частин тіла людини; у літературі, архітектурі та мистецтві — розмірне співвідношення частин твору; один із основних засобів композиції.

Означення. Золотий переріз — це такий пропорційний поділ відрізка на дві нерівні частини, при якому весь відрізок відноситься до більшої частини так, як більша частина відноситься до меншої.

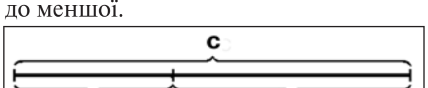


Рис. 1.1

Тобто $c : b = b : a$ (Рис. 1.1)

Якщо взяти відрізок одиничної довжини ($c = 1$), позначити одну з частин за x ($b = x$), то інша дорівнюватиме $1 - x$ $(a = 1 - x)$. Маємо рівняння:

$$1/x = x/(1-x)$$

Після зведення до спільного знаменника маємо: $x^2 + x - 1 = 0$.

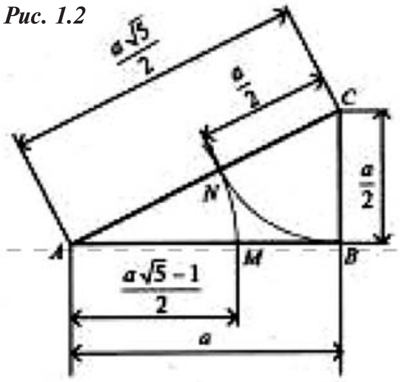
Звідси, $x_{1,2} = (-1 \pm 5^{1/2})/2$ відкинувши від'ємний результат, отримаємо $x \approx 0{,}618$. Але частіше беруть відношення всього відрізка до x, тобто $1/x$. ***Саме число*** $1/x = 1{,}618$ ***називають числом золотого перерізу*** і позначають τ

При поділі відрізка у золотому відношенні $c/b = b/a \approx 1{,}618$

Поділ відрізка у золотому співвідношенні за допомогою циркуля та лінійки описано вже у знаменитих "Началах" ***Евкліда***.

Спочатку побудуємо перпендикуляр $BC = 1/2\ AB$. Потім проводимо AC — гіпотенузу трикутника ABC. Далі будуємо два кола — одне з центром у точці C і радіусом BC, а друге з центром A і радіусом AN, де N — точка перетину першого кола з AC. Точка M, у якій друге коло перетинає AB, ділить його у відношенні τ. Тобто $AM : MB = \tau$ (Рис. 1.2).

Рис. 1.2



Число золотого перерізу тісно пов'язане з послідовністю ***Фібоначчі***, відношення сусідніх чисел якої використовують для представлення приблизного значення числа τ у вигляді дробу натуральних чисел.

Числа Фібоначчі, названі в честь їх "автора" трапляються у багатьох розділах математики: в комбінаториці, геометрії, теорії чисел, задачах на максимум і на мінімум. Послідовність Фібоначчі задається наступною рекурентною формулою:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ (n \geqslant 1).$$

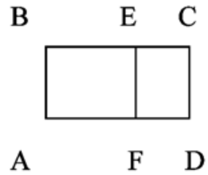
Золотий переріз має прояви ***і в геометрії***. Прямокутник, відношення сторін якого $a{:}b = \tau = 1{,}618$, називають "***золотим***". Якщо відділити від нього квадрат ***ABEF***, сторона якого збігається з меншою стороною прямокутника, отримаємо знову "***золотий***" прямокутник ***ECDF*** (Рис. 1.3).

Якщо провести діагональ цього прямокутника, то вона перетнеться з відрізком ***EF*** у точці ***O***, яка обидва ці відрізки ділить "***золотим поділом***" (Рис. 1.4), тобто $FO : OE = \tau$, $AO : OC = \tau$. Справді, трикутник ***AFO*** подібен трикутнику ***CEO*** (за двома кутами) (Рис. 1.4). Оскільки $BE : EC = \tau$ (за умовою), $BE = AF$ як сторони квадрата, то $AF : EC = \tau$, тобто коефіцієнт подібності цих трикутників дорівнює τ, звідки $FO{:}OE = \tau$, $AO : OC = \tau$.

Якщо від прямокутника ***ECDF*** відітнути квадрат і повторити це кілька разів, то весь час будуть утворюватися квадрати й "***золоті***" прямокутники.

Рівнобедрений трикутник ***ABC*** з кутом при вершині у 36° називається "***золотим***", бо відношення бічної сторони до основи $AB : AC = \tau$ (Рис. 1.5). Цікаво, що кут ***A*** дорівнює куту ***C*** і дорівнює 72°, тому, якщо провести бісектрису кута ***A***, то вона відітне подібні трикутники ***CAD*** і ***ABC***. Трикутник ***CAD*** — "золотий". При цьому

Рис. 1.3



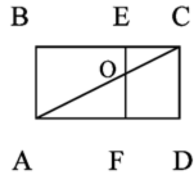


Рис. 1.4

Рис. 1.5
"Золотий" трикутник

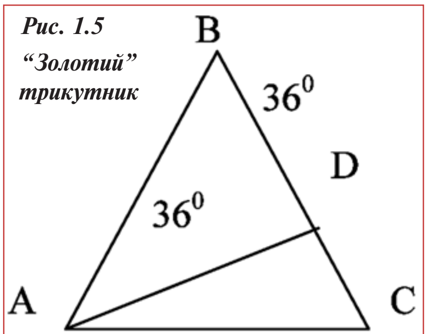
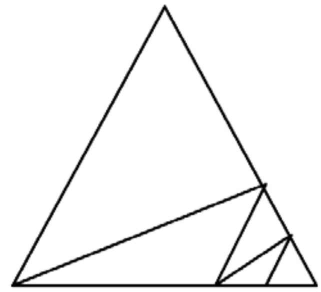


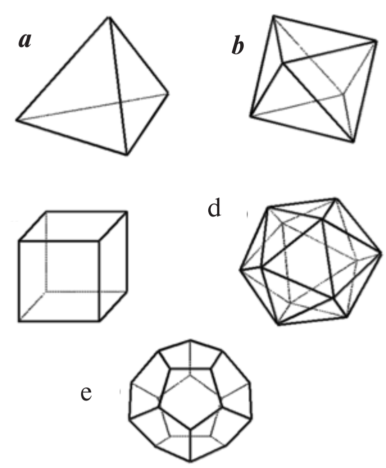
Рис. 1.6



трикутник ***ABD*** — рівнобедрений, $AD = BD$, тому точка ***D*** ділить бічну сторону у "золотому" відношенні. $BD{:}DC = \tau$. (Рис. 1.6). Якщо продовжити процес побудови нових бісектрис і нових рівнобедрених трикутників, отримаємо естетичне задоволення від відчуття краси й гармонії відрізків, що з'являються.

Окрім пентагона і пентаграми золоті відношення є і в правильних многогранниках. ***Правильний многогранник*** — це такий многогранник, всі грані якого рівні та є правильними многокутниками. Ще у "Началах" Евкліда доведено, що існує тільки ***5 видів правильних многогранників, або платонових тіл***: ***тетраедр*** (правильна трикутна піраміда (***a***)), ***гексаедр*** (куб (***c***)), ***октаедр*** (правильний восьмигранник (***b***)), ***додекаедр*** (правильний дванадцятигранник (***d***)), ***ікосаедр*** (правильний двадцятигранник(***e***)) (Рис. 1.7). Геометрія додекаедра і ікосаедра тісно пов'язана із золотою пропорцією. Якщо взяти ребро довжиною ***1*** і знайти їхню зовнішню площу та об'єм, то вони легко виражаються через золоту пропорцію (табл. 1). Навколо многогранників можна описати три види сфер: перша (внутрішня) дотикається до граней, з радіусом R_i, друга (або середня) дотикається до ребер, з радіусом R_m. Третя сфера (зовнішня), описана навколо тіла і дотикається до вершин, з радіусом R_c. Доведено: радіуси цих сфер для многогранників із ребром одиничної довжини виражаються через число золотого перерізу.

Рис. 1.7. Платонові тіла



ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ПОНЯТТЯ ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ

З поняттям про переріз відрізка у крайньому і середньому відношеннях були обізнані, мабуть, ще піфагорійці, які вміли будувати правильний опуклий п'ятикутник і пентаграму. Вчення про золотий переріз виникло у результаті ретельного вивчення природи чисел. Поділ відрізка у крайньому та середньому відношеннях був уперше здійснений великим філософом і геометром ***Піфагором*** 2500 років тому [11]. Перші письмові свідчення про золотий переріз наводяться у "Началах" Евкліда (3 ст. до н.е.). Але існують і факти, що свідчать про те, що про золоту пропорцію знали і задовго до

Табл. 1

Многогранник	Додекаедр	Ікосаедр
Зовнішня площа	$5*3^{1/2}$	$15\tau/(3-\tau)^{1/2}$
Об'єм	$5\tau^5/6$	$5\tau^3/2(3-\tau)$
R_m	$r^2/2$	$\tau/2$
R_c	$3^{1/2}r/2$	$\tau(3-\tau)^{1/2}/2$
R_i	$r^2/2(3-\tau)^{1/2}$	$r^2/2*3^{1/2}$

Піфагора. Уперше задачу про золотий переріз сформулював Евклід у “Началах” (II книга). Інші книги “Начал” містять задачі про поділ відрізка у крайньому і середньому відношеннях, у тому числі задачі про побудову правильного опуклого п'ятикутника, правильних додекаедра та ікосаедра.

Протягом багатьох століть після Евкліда про поділ відрізка у крайньому і середньому відношеннях ніхто не згадував. Середньовічні європейські вчені довідалися про золотий переріз лише з арабських перекладів “Начал”.

В 1202 році вийшов у світ твір “Liber abacci” італійського математика ***Леонардо Пізанського, більше відомого як Фібоначчі***. В книзі було подано розв'язання задачі про розмноження пари кроликів протягом року. Як результат, одержано цікавий ряд чисел — 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 і т.ін., де кожне наступне число дорівнює сумі двох попередніх. Ця послідовність отримала назву ***ряду чисел Фібоначчі***. [3].

На початку епохи Відродження у зв'язку з потребами архітектури зріс інтерес до золотого перерізу. У 1509 р. вихованець славетного в той час Болонського університету, францисканський чернець-математик ***Лука Пачолі***, під впливом свого друга і вченого ***Леонардо да Вінчі*** (1452-1519) видає книгу під заголовком “Про божественну пропорцію” [5; 15]. У цій книзі, ілюстрований Л. да Вінчі, Пачолі розглядає властивості відомої ще з часів Евкліда пропорції поділу відрізка у крайньому і середньому відношеннях (саме Леонардо назвав її ***відношенням “золотого перерізу***”). Особливу увагу Пачолі приділив правильному додекаедру — тілу, тісно пов'язаному із золотим перерізом.

Ентузіастом золотого перерізу був і ***Йоганн Кеплер*** (1571-1630), який пов'язував золотий переріз із будовою Сонячної системи.

Перші роботи, присвячені проявам золотого перерізу у багатьох явищах і закономірностях біологічних об'єктів, з'явились у кінці XVIII — на початку XIX ст. Серед них помітно виділяються праці ***А. Цейзінга*** [5; 15]. Цейзінг розглядав золотий переріз як основний морфологічний закон у природі та мистецтві. Він показав, що цей закон проявляється в пропорціях тіла людини і тілах красивих тварин. ***Густавом Фехнером*** був встановлений зв'язок між психофізичним сприйняттям людини і “золотими” формами предметів [5; 15] . ***Т. Кук*** приділяє багато уваги вивченню ролі логарифмічної спіралі у рослинних і тваринних об'єктах. Він встановив, що феномен росту у біологічних об'єктах пов'язаний зі спіралями золотого перерізу. Про значення золотого перерізу у природі та мистецтві пишуть ***Г. Тимерінг***, ***М. Гіка*** та ***Г.Д. Грім***, які наводять численні приклади проявів золотого перерізу в явищах природи і різних прикладних мистецтвах [11].

Після деякого послаблення уваги до золотого перерізу в середині XX ст. та в другій його половині з'явилась тенденція більш серйозного ставлення до нього з боку вчених-спеціалістів у різних галузях знань, зокрема в біології. Справжній “вибух” досліджень із цієї теми припав на останні 20-15 років XX ст. У ці роки з'явилися грунтовні праці, де золота пропорція та її закономірності використані як своєрідний методологічний принцип, що лежить в основі аналізу самоорганізуючих природних і технічних систем, їх структурної гармонії.

ПРИНЦИП ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ — ВИЩИЙ ПРОЯВ СТРУКТУРНОЇ І ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ДОСКОНАЛОСТІ ЦІЛОГО І ЙОГО ЧАСТИН

3.1 Золота пропорція в образотворчому мистецтві

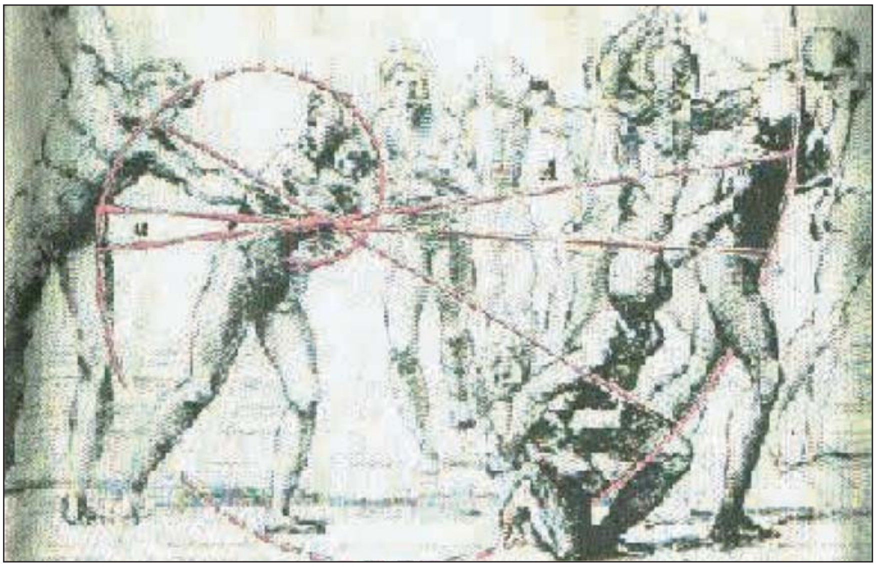
На знаменитій картині ***І.І. Шишкіна “Сосновий бір”,*** очевидно, проявляються мотиви золотого перерізу. Яскраво освічена сосна, яка стоїть на передньому плані, ділить довжину картини у золотому відношенні. Праворуч від сосни — освічений сонцем пагорб. Він ділить у золотому відношенні праву частину картини по горизонталі. Зліва від головної сосни розміщено багато сосен. За бажанням можна успішно продовжити і надалі поділ картини по золотому перетину.

І.І. Шишкін. “Сосновий бір”

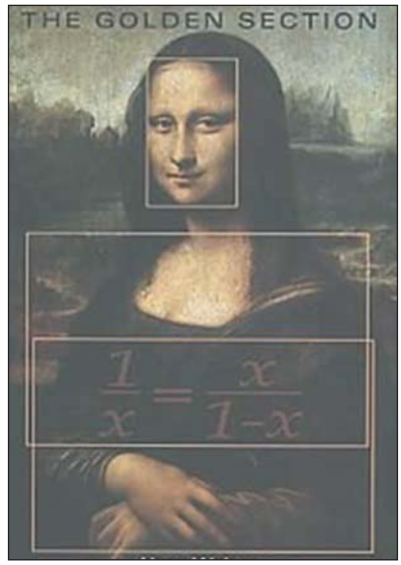
Наявність у картині яскравих вертикалей і горизонталей, які ділять її у відношенні золотого перерізу, надають їй характеру врівноваженості та спокою, згідно із задумом художника. Коли ж задум художника інший, якщо, скажімо, він створює картину з бурхливим розвитком події, то подібна геометрична схема з (переважанням горизонталей та вертикалей) стає неприпустимою.

Багатофігурна композиція, виконана ***Рафаелем*** в 1509-1510 рр., коли знаменитий живописець створював свої фрески у Ватикані, відрізняється динамікою та трагізмом сюжету. Рафаель так і не завершив свій задум, але на основі його ескізу маловідомий італійський гравер ***Маркантиніо Раймонді*** створив гравюру “***Побиття малят”***.

На попередньому ескізі Рафаеля проведені червоні лінії, які йдуть від смислового центру композиції — точки, де пальці воїна тримають дитину, — вздовж фігур дитини, жінки, яка його тримає, воїна з занесеним мечем, а потім вздовж фігур такої ж групи у правій частині ескізу. Якщо природним способом з'єднати ці частини кривої пунктиром, то з точністю виходить золота спіраль. Це можна довести, якщо виміряти відношення відрізків, які відкладаються спіраллю на прямих, що проходять через початок кривої. Ми не знаємо, чи малював насправді Рафаель золоту спіраль при створенні композиції “***Побиття немовлят”***, чи просто “відчував її”. Але



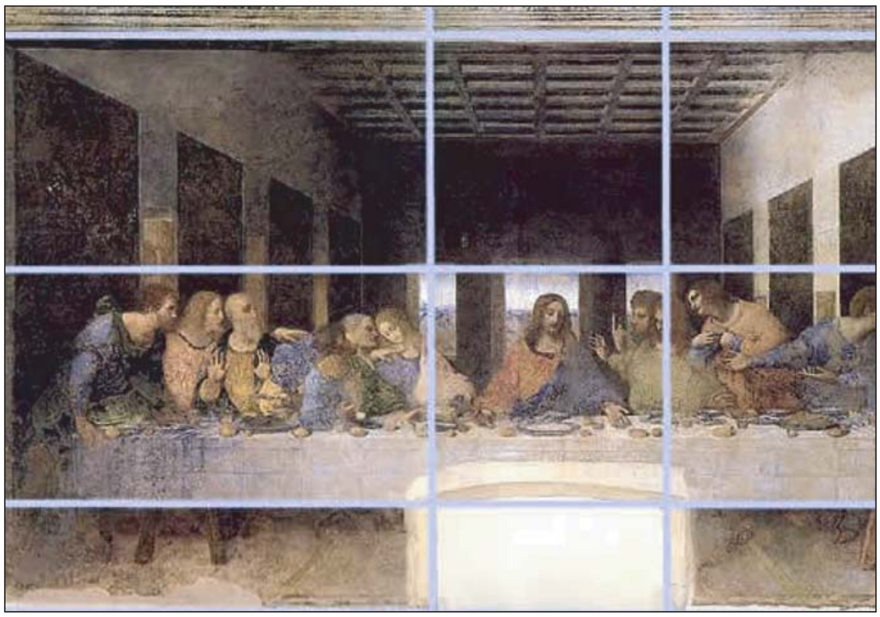
Рафаель. “Побиття немовлят”



Леонардо да Вінчі. “Джоконда”

впевнено можна стверджувати, що гравер Раймонді цю спіраль побачив. Про це свідчать додані ним нові елементи композиції, які підкреслюють розгортання спіралі в тих місцях, де на ескізі її позначено лише пунктиром. Ці елементи можна побачити на остаточній гравюрі Раймонді: арка моста, що іде від голови жінки, — в лівій частині композиції та тіло дитини — в її центрі. У композиції “***Побиття немовлят”*** чудово поєднуються динамізм та гармонія, цьому сприяє вибір золотої спіралі за композиційну основу малюнка Рафаеля: динамізму йому надає вихровий характер спіралі, а гармонійності — вибір золотого перерізу, як пропорції, яка визначає розгортання спіралі.

Висновок: якщо зображення симетричне, центр картини і композиції збігається, то картина сприймається статично, зображення виглядає урочисто, однак позбавлене руху. Якщо ж композиційний центр картини і композиції не збігаються, картина сприймається у динаміці. Художники, помітивши цей факт, стали широко його використовувати, однак постало запитання, куди потрібно зрушити центр композиції, щоб досягти ефекту руху? Це місце на картині і є лінією золотого перерізу. Таке використання золотого перерізу іноді здійснюється інтуїтивно і зумовлено близькістю цього поняття до законів гармонії, що існують у природі. Приклади використання цього правила можна знайти в роботах ***Ботічеллі“***Народження Венери***”***, ***Веласкеса “***Мадонна з немовлям***”***, ***Леонардо да Вінчі*** “Таємна вечеря” і “Джоконда”, ***О. Іванова “***З'явлення Христа народу***”***, ***І. Крамського*** “Незнайомка” та інших художників.



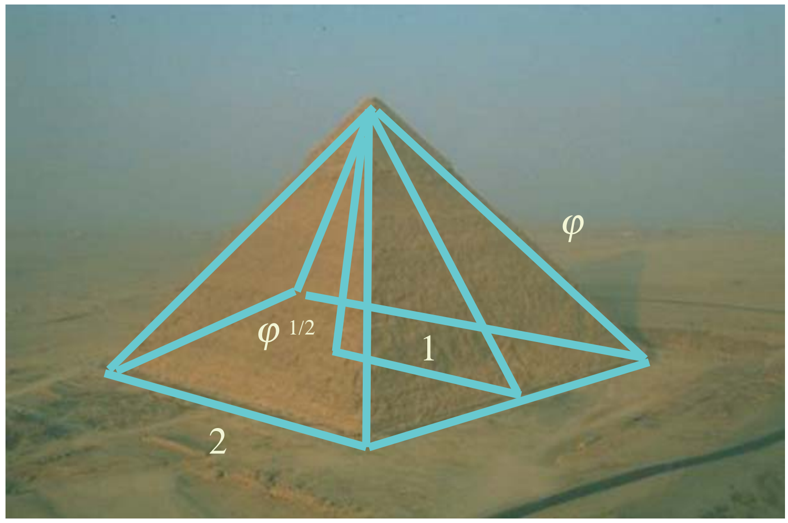
Леонардо да Вінчі. “Таємна вечеря”

Ботічеллі. “Народження Венери”

3.2. Золотий переріз в архітектурі

У 1840 р. одне із чудес світу, Велика піраміда Хеопса біля Гізи, ще не мала пошкоджень. У цьому році встановили, що переріз піраміди, який проходить через її висоту, паралельно сторонам основи, — рівнобедрений трикутник, складений з двох прямокутних трикутників, сторони кожного з яких утворюють геометричну прогресію. Висота піраміди в той час становила ***148,2*** м (нині вона становить приблизно ***137*** м), а сторона квадратної основи — ***232,8*** м. Отже, відношення висоти піраміди до половини основи: $h/0,5 = 148,2/232,8 = \tau^{1/2}$. Цей дивовижний збіг, звісно, не дає підстав вважати, що такої форми зодчий надав їй свідомо.

У стародавніх країніх у будівлях громадського призначення широко використовували пропорцію золотого перерізу (Парфенон в Афінах, Колізей в Римі). Пропорцію золотого перерізу зустрічаємо у творах зодчих Ренесансу: ***Мікеланджело***, ***Палладіо***, ***Д. Браманте***, а також у творах представників російського класицизму в архітектурі ***В. Баженова***, ***М. Казакова***, ***А.Захарова***.



Піраміда Хеопса

Парфенон в Афінах

Афіна Парфенос

Колізей в Римі

3.3. Золоте відношення у музиці

Може здатися неймовірним, що золоте відношення має певне застосування у музиці, але це так. Ще Піфагор і його учні, які досліджували гармонію, помітили, що висота звуку при даному натягу струни залежить від її довжини. Якщо вкоротити струну вдвічі, то дістанемо звук на октаву вищий. Відношення довжини струн, що дають різні звуки гами, до довжини струни, яка має основний тон, також утворені невеликими цілими числами.

У таблиці 2 подано відношення довжин струн, звуки яких становлять деякі музичні інтервали у межах однієї (темперованої) гами. Знайдемо довжину струни ***x***, що утворює обернене до золотого відношення з довжиною струни ***l***, довжину якої матимемо за тоніку. Матимемо: ***l / x = x / l — x***.

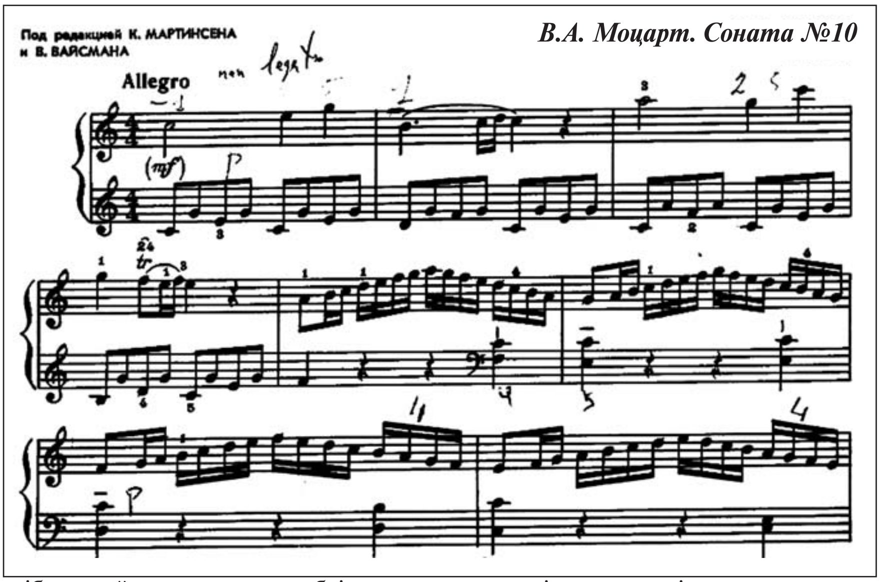
Звідки дістанемо: ***x = 0,61803 *l , x / l = 0,61803 = 1 / τ***. Зіставляючи це відношення з відношеннями Табл 1, впевнюємося, що найближчими до нього будуть значення 0,625 і 0,600, які відповідають ***малій і великій секстам***. Обидві сексти належать до найприємніших для слуху інтервалів. Вони відповідають більшій частині поділеної у золотому відношенні з надлишком (5/8) і недостачею (3/5) довжини струни основного тону.

Табл. 2. Золота пропорція у музиці

Прима	1:1=1,00000
Секунда	8:9 = 0,88888
Мала терція	5:6=0,83333
Велика терція	4:5=0,80000
Кварта	3:4=0,75000
Квінта	2:3=0,66666
Мала секста	5:8=0,62500
Велика секста	3:5=0,60000
Септима	8:15=0,53333
Октава	1:2=0,50000

Славетні італійські майстри смичкових інструментів ***Н.Аматі*** (1596-1684) і ***А.Страдіварі*** (1644-1737) свідомо застосовували пропорцію золотого перерізу, надаючи своїм виробам привабливого зовнішнього вигляду. Ми не маємо відомостей про те, як впливає застосування ***золотого перерізу*** при зовнішньому оформленні скрипки на якість звуку, але безперечним є те, що це не зашкодило смичковим інструментам, створеними знаменитими італійськими майстрами, стати і лишатися найкращими до нашого часу.

У класичних музичних здобутках також можна знайти золотий переріз. Але для розташування точки ***золотого перерізу*** потрібно пам'ятати, що музика — мистецтво, яке перебуває в часі, а не у просторі. Тому твори, в яких потрібно знайти цю точку, необхідно поділяти на чотири рівні часові відрізки. Точка ***золотого перерізу***, що у цьому випадку краще не обчислюється, а відчувається, збігається в класичних і народних творах з ***кульмінацією*** (***кульмінація*** — точка найвищої напруги, що створюється підкресленим, акцентованим, посиленим звучанням, наприклад усього оркестру, особливо голосно. У мелодії, зазвичай, це найвища нота). У класичних музичних творах кульмінація, зазвичай, міститься наприкінці третього часового відрізка.



В.А. Моцарт. Соната №10

Ще у 1925 році мистецтвознавець ***Л.Л. Сабанєєв***, проаналізувавши 1770 музичних творів 42 авторів, знайшов 3275 золотих перерізів і показав, що більшість видатних творів можна легко розділити на частини або за темою, або за інтонаційним ладом, які перебувають між собою у відношенні золотого перерізу [11-12]. Крім того, чим талановитіший композитор, тим у більшій кількості його творів було знайдено золоті перерізи. У ***Аренського*** — у 95%, ***Бетховена*** — 97%, ***Гайдна*** — 97%, ***Моцарта*** — 91%, ***Скрябіна*** — 90%, ***Шопена*** —92%, ***Шуберта*** —91% від усіх творів. На думку ***Сабанєєва***, золотий переріз призводить до враження особливої стрункості музичного твору. Цей результат Сабанєєв перевірив на всіх 27 етюдах Шопена. Він знайшов у них 178 золотих перерізів. При цьому виявилося, що не тільки великі частини, але й менші всередині етюдів діляться у золотому відношенні і симетричні. У Бетховена твори також діляться на дві симетричні частини, всередині якої спостерігаються прояви золотої пропорції.

Композитор і вчений ***М.А. Марутаєв*** підрахував кількість тактів у знаменитій сонаті "Апасіоната" і знайшов ряд цікавих числових відношень. У розробці — центральний структурній одиниці сонати, де інтенсивно розвиваються теми і змінюються тональності, — два основні розділи. У першому 43,25 тактів, а у другому — 26,75. Відношення між ними 43,25 : 26,75 = 1,617 дає золотий переріз.

У Сонаті №10 Моцарта всього 73 такти. Перша її частина складається з 28-ми тактів, друга — з 45, отже, відношення між частинами — 1,62 [9].

Висновок: золотий поділ є критерієм гармонії композиції музичного твору.

3.4. Золоті пропорції у літературі

Багато чого у структурі поетичних творів робить цей вид мистецтва схожим із музикою. Чіткий ритм, закономірне чергування наголошених і ненаголошених складів, впорядкована розмірність віршів, їхня емоційна насиченість роблять поезію рідною сестрою музичних творів. Кожен вірш має свою музичну форму — свій ритм і мелодію. Можна очікувати, що в структурі віршів з'являться деякі риси музичних творів, закономірності музичної гармонії, а відповідно і золота пропорція.

Почнемо з величини вірша, тобто кількості рядків у ньому. Здавалося б, цей параметр поетичного твору може змінюватися довільно. Але виявилося, що це не так. Проведений ***Н. Васютинським*** аналіз віршів О.С. Пушкіна, з цієї точки зору показав, що розміри віршів розподілені нерівномірно; виявилося, що Пушкін явно надавав перевагу розмірам в 5, 8, 13, 21, 34 рядки (***числа Фібоначчі!***) [17].

Багатьма дослідниками було помічено, що вірші подібні до музичних творів: у них також існують кульмінаційні пункти, які ділять вірш у пропорції золотого перерізу. Розглянемо оповідання О.С. Пушкіна "Станционный смотритель", у якому 377 рядків.

Кульмінаційний момент оповідання — це повідомлення про те, що дочка наглядача поїхала з гусаром. Цей момент відображено у фразі, що є 214 рядком. Маємо точну відповідність золотому перерізу. Один із останніх віршів Пушкіна “Не дорого ценю я громкие права...” складається з 21 рядка, і в ньому виділяються дві смислові частини: у 13 та 8 рядків. Характерно, що перша строфа (13 рядків) за змістовим наповненням ділиться на 5 і 8 рядків, тобто весь вірш побудовано за законами золотої пропорції.

Великий інтерес становить аналіз роману “***Евгений Онегин***”, зроблений Васютинським. Цей роман складається з 8 розділів, у кожному з яких в середньому близько 50 віршів. Найдовершенішим та емоційно насиченим є восьмий розділ. У ньому 51 вірш, разом із листом Онєгіна Тетяні (60 рядків), а це точно відповідає числу Фібоначчі 55. Кульмінацією розділу є освідчення Євгенія у коханні Тетяні — рядок “Бледнеть и гаснуть... вот блаженство!”. Цей рядок ділить восьмий розділ на дві частини — в першій 477 рядків, а у другій — 295 рядків. Їх відношення дорівнює 1,617!

Таким чином, ***золотий переріз відіграє у поезії значущу для змісту роль, виділяючи кульмінаційний пункт вірша***.

У давні часи золотому перерізу, як і деяким фігурам, числам і магічним

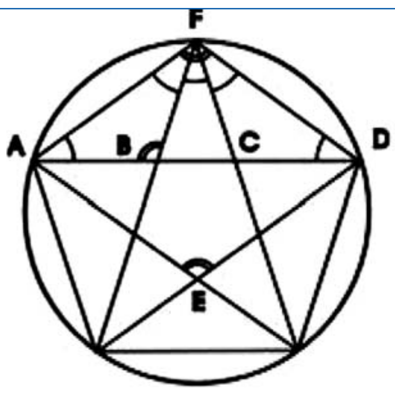


Рис. 1.8. Пентаграма

Й.В. Гете . “Фауст”

М е ф і с т о ф е л ь
Та так то так,
А звідси вийти як?
Завадою постане під ногами
Біля порога тайний знак.

Ф а у с т
А! Ти злякався пентаграми,
що має владу над чортами?

(Переклад ***М. Лукаша***, К., 1955)

квадратам, надавали містичного значення, наприклад, Мефістофель не може вийти із кімнати Фауста тому, що на порозі намальовано правильний зірчастий п'ятикутник. Пентаграму у вигляді печатки використовували деякі таємні товариства. У піфагорійців пентаграма була символом здоров'я і досконалості, розпізнавальним знаком для членів організації. У християнській символіці пентаграма означає Святу Трійцю та подвійну (божественну і людську) природу Христа. У Китаї пентаграма — символ п'яти стихій (У-Син). Слід зазначити, що в началах Евкліда виклад питань, пов'язаних із золотим перерізом, не містить жодних містичних домислів.

У чому ж привабливість зірки? У цій фігурі спостерігається дивна сталість відрізків, що її утворюють. Важко повірити, але (Рис. 1.8)

$AD{:}AC=AC{:}CD=AB{:}BC=AD{:}AF=AF{:}FC$

Використавши симетричність зірки, можна ще довго продовжувати ряд рівностей. Розглянемо першу рівність. Точка C поділяє відрізок AD на дві нерівні частини, і довжина більшої частини так відноситься до довжини меншої, як довжина всього відрізка до довжини більшої частини. Позначимо довжину відрізка AD через a, AC через b, оскільки

$CD = a - b$, то $a : b = b : (a - b)$ або $a^2 = ab + b^2$.

Розділивши обидві частини на b^2 і позначивши шукане відношення $a : b$ буквою τ, одержимо рівняння

$\tau^2 = \tau + 1$, яке має один додатній корінь $\tau = 1{,}6180339...$

3.5 Золотий поділ у живій природі

У біологічних дослідженнях 1970-90 рр. показано, що, починаючи з вірусів і рослин і закінчуючи організмом людини, всюди проявляється золота пропорція, яка характеризує співрозмірність і гармонійність їхньої будови. ***Золотий переріз визнаний універсальним законом живих систем***.

Наближення числа золотого перерізу застосовуються у ботаніці. Якщо через якусь із бруньок молодого пагона рослини, який ми вважаємо зрізаним конусом, провести твірну, то вона на деякій відстані від цієї бруньки зустріне бруньку, яка розташована так само, як перша. Підрахувавши, скільки бруньок міститься на стеблі між цими бруньками і додавши до здобутого числа одиницю, дістанемо число, яке має назву листкового циклу. Кількість бруньок в одному циклі в молодому пагоні дуба дорівнює 5, у пагона вишні — 8; є рослини, цикли яких мають 3, 5, 8, 13, 21 бруньку. Бруньки пагона містяться на однаковій відстані одна від одної. Сполучивши тепер послідовно бруньки одного циклу, дістанемо спіральну лінію. Спіраль між послідовними, однаково розташованими бруньками, робить відповідно 1, 2, 3, 5 витків. Отже, і листкові цикли, і кількість витків спіралі виражаються членами ряду Фібоначчі.

Було встановлено, що ряд Фібоначчі характеризує структурну організацію багатьох живих систем. Наприклад, гвинтове розміщення листків на гілці становить дріб (число обертів на стеблі до числа листків у циклі, наприклад, 2/5, 3/8, 5/13), що відповідає ряду Фібоначчі. Добре відома "золота" пропорція п'ятипелюсткових квіток яблуні, груші та багатьох інших рослин. Носії генетичного коду — молекули ДНК та РНК — мають структуру подвійної спіралі; її розміри майже повністю відповідають числам Фібоначчі.

Ще Й. Гете підкреслював тенденцію природи до спіральності. Павук плете павутиння спіралеподібно. Налякана зграя північних оленів тікає по спіралі. Молекула ДНК закручена по подвійній спіралі. Гете називав ***спіраль*** "***кривою життя***". Гвинтоподібне та спіральне розміщення листків на гілках дерев помітили давно. Спіраль побачили у розміщенні зернят соняшника, у шишках сосни, ананасах, кактусах і т.п. Спільна робота ботаніків та математиків пролила світло на ці дивовижні явища природи. Виявилось, що у розміщенні листків на гілці (філотаксис), зернят соняшника, шишок сосни проявляє себе ряд Фібоначчі, відповідно, проявляє себе і закон золотого перерізу. Квітки та зернятка соняшника, ромашки, частинки ананаса, хвойних шишок "упаковані за логарифмічними ("золотими") спіралями, що завиваються назустріч одна одній", причому числа "правих" та "лівих" спіралей завжди відносяться одна до одної, як сусідні числа Фібоначчі.

Н.Н. Степанов відкрив численні прояви золотого перерізу і чисел Фібоначчі у структурі ґрунтового покриву, складі ґрунтів та їхній продуктивності. ***П.Ф. Шапоренко*** та ***В.Ф. Лужецький*** провели велику кількість вимірів скелету людини та тварин, зокрема й викопних, простежуючи еволюційні зміни основних системотворних елементів. Вони переконливо показали, що гармонійна співрозмірність частин тіла пов'язана з узагальненими ***p***-пропорціями.

В.І. Коробко знайшов численні, раніше невідомі, прояви золотої пропорції в організмі людини: його фізіологічних ритмах, ергономічних параметрах "входження в навколишнє середовище" [13]. У зв'язку з вищесказаним слід зазначити, що центр наукового пошуку проявів золотого перерізу все більше зміщується до проблем біології.Ще одним прикладом золотого поділу частин тіла живого організму є радіолярії. Це найпростіші планктонові морські тварини, які переважно живуть у Тихому та Індійському океанах. Будучи за розмірами менше за 1 мм, вони мають побудовані з кремнезему або сірчасто-кислого стронцію кістяки, які набувають різноманітних правильних геометричних форм. Установлено, що серед кістяків радіолярій є всі п'ять видів правильних многогранників.

У багатьох ***метеликів*** співвідношення грудної та черевної частин тіла

відповідає золотій пропорції. Склавши крила, нічний метелик утворює правильний рівносторонній трикутник. Але варто йому розвести крила, і ви побачите принцип поділу тіла на 2, 3, 5, 8. Бабка теж створена за золотою пропорцією: відношення довжини корпуса до довжини хвоста дорівнює відношенню всієї довжини до довжини хвоста. В тілі ящірки (Рис. 1.9), на перший погляд, можна побачити приємні для сприйняття пропорції — довжина її хвоста відноситься до довжини решти тіла, як 62 до 32. Має золоті пропорції і пташине яйце (Рис. 1.10).

Золотий переріз можна знайти і в анатомії. Закон золотого перерізу помітний у кількісному поділі людського тіла, що відповідає числам ряду Фібоначчі. Перевірено, що відношення середніх значень лінійних частин тіла людини близьке до числа золотого перерізу. При цьому основна лінія поділу (лінія пояса) поділяє висоту чоловічого тіла в дещо більшому (13/8 = 1,625), а жіночого — в дещо меншому (5/8 = 1,6) відношенні, ніж число 1,61803. Значення першого відношення ближче до числа золотого перерізу. Чоловіче відношення іноді називають мажорним (збільшеним), а жіноче мінорним (зменшеним). З віком людини значення цього відношення, за ***Цейзінгом***, змінюється. Основна точка поділяє зріст новонародженого немовляти чоловічої статі навпіл, але з роками згадане відношення, змінюючись, стає у 13 років мажорним, а у 17 — мінорним. Далі воно починає зростати і досягає свого остаточного значення (1,625) у 21 рік. Це відношення можна дістати, наприклад, зіставляючи лінійні розміри частин висоти у статуї Аполлона Бельведерського, якого в Стародавній Греції вважали еталоном чоловічої краси, та статуї Венери Мілоської.

Аполлон Бельведерський

Рис. 1.9. Тулуб ящірки

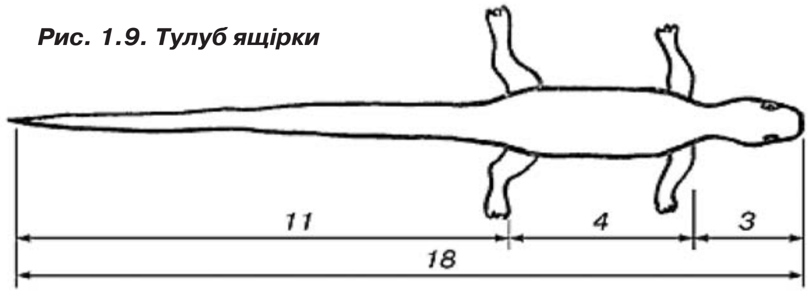


Рис. 1.10. Пташине яйце

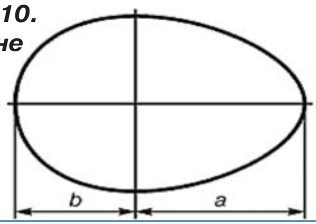
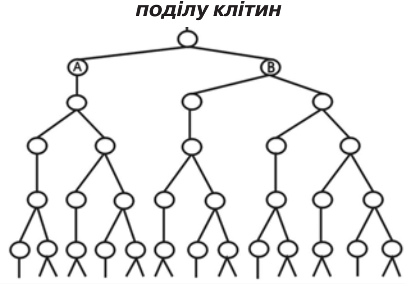


Рис.1.11. Схема асинхронного поділу клітин

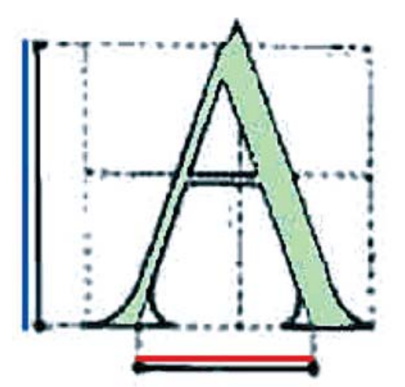


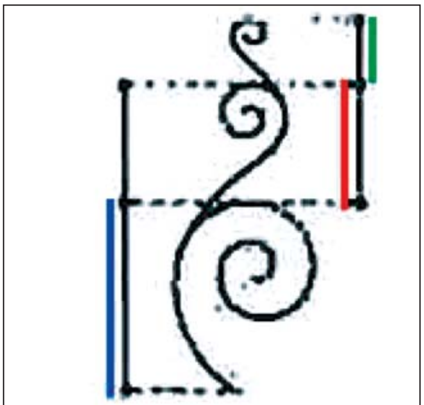
Одним із варіантів пояснення таких частих проявів золотого перерізу у природі є асинхронний поділ клітин, коли кожна клітина ділиться на дві, одна з яких пропускає наступний такт поділу (Рис. 1.11). Розглянемо кількісні характеристики такого поділу. Після певної кількості синхронних поділів клітини починають ділитися винятково асинхронно. Після першого такту поділу утворюється дві клітини A і B, з яких у наступному такті ділитиметься лише B. Після двох тактів асинхронного поділу утворюється три клітини, з яких у третьому ділитиметься дві. Після третього такту сумарна кількість клітин дорівнюватиме п'ятьом, з яких у наступному такті ділитиметься три. Отже, в процесі асинхронного поділу з однієї клітини утворюватиметься 2, 3, 5, 8, 13, 21... клітин, і при кожному наступному такті відношення кількості клітин, що утворилась після поділу, до їхньої попередньої кількості наближається до числа золотого перерізу.

Висновок: оптимізація конструкції дає можливість кожному організму адекватно виконувати свою функцію при мінімально можливих витратах ресурсів навколишнього середовища. Таким чином, “сліпа” розумна природа вказує людству єдино правильний можливий шлях до порятунку — забезпечення його потреб за рахунок ефективних технологій, максимально зберігаючи енергію та матерію у навколишньому світі.

Венера Мілоська

“Золотий” шрифт А. Дюрера





3.6. Золота пропорція у фізиці

У кожної планети є мінімальний радіус орбіти, але є й максимальний — як і у будь-якого еліпса. У всіх дев'яти планет сонячної системи відношення мінімального і максимального радіусів орбіт — цілі степені числа золотого перерізу. Похибки зовсім незначні — частки відсотка. У Землі ж відношення радіусів дорівнює числу золотого перерізу першого степеня.

Ще один цікавий факт: відношення відстані від Сонця до Землі до відстані від Сонця до Плутона — число, що виражає золотий переріз.

Прискорення сили тяжіння при віддаленні від Землі описується формулою: $g_h = g_o R^2/(R+h)^2$, де h — висота над поверхнею Землі, R — її радіус.

При опусканні тіла вглиб Землі характер залежності g від h змінюється:

$g_{-h} = g_o(1-h/R)$.

Коли $g_h = g_{-h}$? Зрозуміло, що одним із розв'язків буде $h = 0$. Другий розв'язок такий: $h = R\ ((5^{-1/2} - 1)/2)$, де ми бачимо вже знайому формулу золотого перерізу.

ГАРМОНІЯ ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ І СУЧАСНІ УЯВЛЕННЯ ПРО КРАСУ

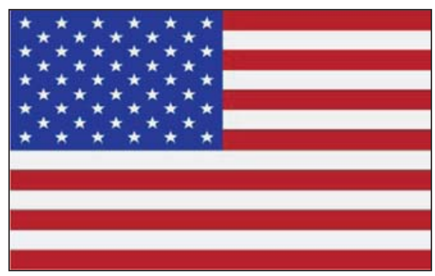
У XIX ст. великої слави набули психологічні досліди ***Густава Фехнера***. Усім учасникам експерименту (228 чоловіків і 119 жінок) пропонувалось вибрати з-поміж запропонованих прямокутників найприйнятніший для їхнього сприйняття з естетичного погляду. Виявилося, що досить часто вибір падав на прямокутник із відношенням сторін τ. А чи не змінилися з того часу уявлення людей про красу?

У наш час золоті прямокутники трапляються досить часто: це і форма столів, конвертів, поштових марок, шкільних дошок, деяких аркушів паперу, форми книжок, кімнат, будівель.

П'ятикутна зірка — пентаграма — трапляється на прапорах і гербах багатьох країн, зокрема Китаю, США, Сінгапуру, В'єтнаму, Пакистану, Туреччини та Євросоюзу. У багатьох предметах побуту, таких як посуд, можна знайти золоті відношення. ***Альбрехт Дюрер*** навіть створив “золотий” шрифт, у якому букви побудовані згідно з золотими пропорціями.

Без перебільшення, принцип золотого перерізу є вищим проявом структурної і функціональної досконалості цілого і його частин.

Пентаграма на прапорах Євросоюзу та різних країн



Література

1. ***Бендукидзе А.Д.*** Золотое сечение // Квант. — 1973. — №8. — с. 22-27.
2. ***Вірченко Н.*** Про красу математики // Математика. — 2005. — №11. — с. 1-3.
3. ***Воробьев Н.Н.*** Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1992. — 200 с.
4. ***Гарднер М.*** Математичні головоломки й розваги / Під ред. Л.А. Смородинського. — М.: Мир, 1971. — 511 с.
5. ***Ковалёв Ф.В.*** Золотое сечение в живописи. — К.: Вища шк., 1989. — 140 с.
6. ***Маліс І.В.*** Подібність трикутників. Золотий переріз //Математика. — 2003. — №34. — с. 13-16.
7. ***Нікулін О. В., Кукуш О. Г.*** Геометрія: поглибл. курс. 7-9 кл.: Навч. пос. — Київ: Ірпінь, Перун, 1999. — 352 с.
8. ***Попов. Є.Д.*** Алгебраїчні властивості відношення золотого перерізу / У світі математики. — К.: Радянська школа, 1980. — Вип. 11.
9. ***Попов Є.Д.*** Геометричні властивості відношення золотого перерізу /У світі математики. — К.: Радянська школа, 1982. — Вип. 13.
10. ***Попова І.М.*** Відношення та пропорції // Математична газета . — 2006. — №4. — с. 7-12.
11. ***Пустовит А.В.*** Этика и эстетика: Наследие Запада. История красоты и добра: Учеб. пособие. — К.: МАУП, 2006. — 680 с.
12. ***Симонович С.В., Євсєєв Г.А., Алексєєв А.Г.*** Спеціальна інформатика: Навчальний посібник. — М.: АСТ-ПРЕС КНИГА, 2003. — 480 с.
13. ***Тадеєв В.О., Рибаков І.К.*** Про деякі властивості правильних многокутників / У світі математики. - К.: Радянська школа, 1982. — Вип. 13.
14. ***Тарасов Л.В.*** Симметрия в окружающем мире. — М.: Оникс 21 век: "Мир и образование", 2005. — 256 с.
15. ***www.goldenmuseum.com***
16. ***netnotes.narod.ru***
17. ***www.abc-people.com***